TRANSFORMATA FOURIER

Obiectele fine se obţin prin prelucrări rafinate.

1. Definiţia transformatei Fourier

Apelând la seria Fourier (forma complexă)

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1}$$

realizăm de fapt reprezentarea unei funcţii periodice $\varphi(x)$ de perioadă 2π. Seria Fourier corespunzătoare unei funcţii de perioadă $2\pi 1$ este

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{x}{1}} \tag{2}$$

Cu formulele uzuale * obţinem coeficienţii Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi 1}\int_{-\pi l}^{\pi 1} \varphi(\xi) e^{-in\frac{\xi}{1}} d\xi \tag{3}$$

Din (2) şi (3) obţinem:

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi 1}\int_{-\pi l}^{\pi 1} \varphi(\xi) e^{\frac{in}{1}(x-\xi)} d\xi \tag{4}$$

---

* $c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} \varphi(\xi) e^{-in\omega\xi} d\xi$, cu $\omega = 2\pi/T$, $T =$ perioada

Să observăm că (1) construieşte o funcţie periodică de perioadă 2π, ca suprapunere de oscilaţii armonice pure. Încercând o trecere la limită după 1 cu $1 \to \infty$ în (4), găsim o reprezentare a unei funcţii definită pe toată axa $-\infty < x \leq \infty$ ca suprapunere de oscilaţii armonice.

Ţinând cont de argumentul discret

$$\tau_n = \frac{n}{l}$$

se transformă în argumentul continuu τ prin trecere la limită după 1, din (4) obţinem:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\tau(x-\xi)} d\xi \right\} \tag{5}$$

numită integrala Fourier a lui φ.

Notând

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\tau\xi} d\xi \tag{6}$$

formula căutată pentru dezvoltarea lui φ în oscilaţii armonice simple este:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{-i\tau x} d\tau \tag{7}$$

2. Funcţia $\psi(\tau)$ dată de (6) se numeşte **transformata Fourier** a funcţiei $\varphi(x)$, iar (7) se numeşte **transformata Fourier inversă**. Formulele (6) şi (7) au ambele factorul $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ şi se mai numesc forme simetrice. Uneori se optează pentru formele nesimetrice.

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\tau\xi} d\xi \quad \text{sau} \quad \psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\tau x} dx \tag{6'}$$

respectiv

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau)e^{i\tau x}d\tau \quad \text{sau} \quad \varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau)e^{-i\tau x}d\tau \qquad (7')$$

pentru transformata Fourier ($6'$) şi inversa sa ($7'$). După factorul din faţă este evident cu care din formule se va lucra.

3. Transformata Fourier şi diferite operaţii

În cele ce urmează vom nota operatorul de transformare Fourier cu F şi cu F^{-1} inversul său. Deci:

$$\psi(\tau)=F(\varphi(x))=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\tau x}dx \qquad (*)$$

şi

$$\varphi(x)=F^{-1}(\Psi(\tau))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\tau)e^{i\tau x}d\tau \qquad (**)$$

4. Transformata Fourier şi operaţia de derivare

Definiţie. O funcţie $f:[a,b]\to R$ se numeşte absolut continuă dacă: $(\forall)\varepsilon>0,\ (\exists)\delta$ încât oricare ar fi sistemul finit de intervale disjuncte $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$ cu:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \ \text{să avem} \ \sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon.$$

Să observăm că **absolut continuitatea** este mai tare ca **uniform continuitatea**.

Să presupunem că $\varphi(x)$ este absolut integrabilă şi absolut continuă în vecinătatea oricărui punct şi φ' este integrabilă pe R.

Datorită integralităţii lui φ' avem:

$$F(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\tau x} dx = \varphi(x) e^{-ix\tau} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\tau \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\tau} dx$$

Cum $\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$ conform celor relatate anterior, obţinem:

$$F(\varphi') = i\tau F(\varphi) \tag{8}$$

Cu alte cuvinte, derivării funcţiei $\varphi(x)$ îi corespunde înmulţirea funcţiei $\psi(\tau) = F(\varphi)$ cu $i\tau$.

Dacă φ are derivate integrabile până la ordinul m, atunci repetând (8) obţinem:

$$F\left(\varphi^{(k)}(x)\right) = (i\tau)^k F(\varphi),\ k = \overline{0, m} \tag{9}$$

5. Transformata Fourier şi convoluţia

Fie $\psi_1(\tau)$ şi $\psi_2(\tau)$ transformatele Fourier ale funcţiilor absolut integrabile $\varphi_1(\tau)$ şi $\varphi_2(\tau)$. Căutăm funcţia care are ca transformată Fourier produsul $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$. Avem:

$$\psi_1(\tau) \cdot \psi_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi) e^{i\tau\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\eta) e^{-i\tau\eta} d\eta =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi)\varphi_2(\eta) e^{i\tau(\xi+\eta)} d\xi d\eta$$

integrala dublă fiind absolut convergentă conform unui rezultat cunoscut al lui Fubinni.

Făcând schimbarea de variabilă $\eta = x - \xi\ (\xi + \eta = x)$ pentru a nu avea două exponenţiale, obţinem:

$$\psi_1(\tau)\cdot\psi_2(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x-\xi)e^{-i\tau x}dx\right\}d\xi=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\tau x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\varphi_2(x-\xi)d\xi\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi_1*\varphi_2)(x)e^{-\tau x}dx$$

$$(\varphi_1*\varphi_2)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\xi)\cdot\varphi_2(x-\xi)d\xi$$

se numeşte convoluţia lui φ_1 şi φ_2. Deci produsul $\psi_1(\tau)\psi_2(\tau)$ provine din convoluţia lui φ_1 cu φ_2. Deci $F((\varphi_1*\varphi_2)(x))=\psi_1(\tau)\cdot\psi_2(\tau)$ unde $\psi_1(\tau)=F(\varphi_1(x)),\ \psi_2(\tau)=F(\varphi_2(x))$.

6. Ecuaţia căldurii rezolvată cu transformata Fourier.

Se caută soluţia deci pentru

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{10}$$

pentru $(-\infty < x \le \infty, t \ge 0)$ şi care pentru t = 0 coincide cu $u_0(x)$ dat, deci cu condiţia iniţială u (x, 0) = $u_0(x)$. Ca interpretare fizică, problema cere determinarea temperaturii unei bare infinite omogene şi filiforme (deci unidimensionale) în toate punctele t > 0, dacă cunoaştem temperatura sa la momentul iniţial t = 0.

Pentru a ne putea mişca liberi în calcule, facem presupuneri suplimentare asupra lui u (t, x) să le zicem “ de a se comporta cuminte”.

1. $u(t,x),\ u_x(t,x),\ u_x^2(t,x)$ sunt continue şi absolut integrabile în x pentru $-\infty < x < \infty$ şi pentru $t \ge 0$ fixat.

2. Funcţia $u_t(x,t)$ admite, pe întreg intervalul $0 \le t \le T$ un majorant integrabil:

$$\left|u_t(t,x)\right| \le \Phi(x),\ \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x)dx < \infty$$

A aplica lui (10) transformata Fourier revine la a amplifica cu $e^{i\tau x}$ şi să integrăm după x de la $-\infty$ la $+\infty$. Dar conform condiţiei (11) avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-i\tau x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\tau x}dx\right) = v_t(\tau,t)$$

unde

$$v(\tau,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\tau x}dx$$

este transformata Fourier a soluţiei căutate u (x, t).

Aplicând formula (2) din c.a., avem:

$$F\left(u_x^2(x,t)\right) = -\tau^2 F(u) = -\tau^2 v(\tau,t)$$

Am obţinut astfel ecuaţia ordinară:

$$v_t(\tau,t) = -\tau^2 v(\tau,t) \tag{11}$$

pentru care trebuie să căutăm soluţia care, pentru t = 0, coincide cu:

$$v_0(\tau) = F(u_0(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)e^{-i\tau x}dx \tag{12}$$

Luând în formula $\psi(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = e^{-\frac{\tau^2}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; a=1/(4t) obţinem că

$$e^{-\tau^2 t} = F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) \tag{13}$$

Soluţia ecuaţiei (11) are forma:

$$v(\tau,t) = e^{-\tau^2 t}v_0(\tau) = (4) = F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)v_0(\tau) = (3) =$$

$$F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\cdot F(u_0)=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right)=F\big(u(x,t)\big)$$

Deci

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\cdot u_0(x-\xi)d\xi \qquad (14)$$

Formula obţinută în (14) se numeşte integrala lui Poisson. În teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale, se demonstrează unicitatea soluţiei într-o vastă clasă de funcţii nu numai pentru "clasa funcţiilor cuminţi".

Exerciţii rezolvate

1. Reprezentaţi printr-o integrală Fourier funcţia

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}1 & \text{pentru} \quad |\xi|<a,\\ \frac{1}{2} & \text{pentru} \quad \xi=\pm a,\\ 0 & \text{pentru} \quad |\xi|>a,\end{cases}$$

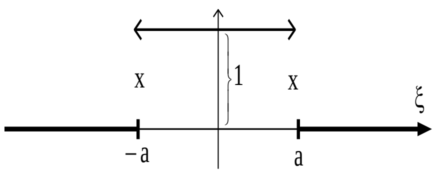

Figura 1

Cu a > 0, funcţie numită şi factorul discontinuu al lui Dirichlet.

Rezolvare: Folosind

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{i\tau(x-\xi)}d\xi, \qquad (*)$$

mai întâi calculăm

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cdot e^{i\tau(x-\xi)}d\xi = \int_{-a}^{a} e^{i\tau(x-\xi)}d\xi = e^{i\tau\xi}\int_{-a}^{a} e^{-i\tau\xi}d\xi =$$
$$= -e^{i\tau x}\cdot\frac{1}{i\tau}\cdot e^{-i\tau\xi}\Big|_{-a}^{a} = \frac{i}{\tau}e^{i\tau x}\left(e^{-i\tau a} - e^{i\tau a}\right) = \frac{2}{\tau}e^{i\tau x}\cdot\sin a\tau.$$

Înlocuind în (*) se obţine

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\tau}e^{i\tau x}\sin a\tau d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}(\cos\tau x + i\sin\tau x)\sin a\tau d\tau =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\tau x\sin a\tau}{\tau}d\tau + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\tau x\sin a\tau}{\tau}d\tau = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\tau x\sin a\tau}{\tau}d\tau$$

2. Reprezentaţi printr-o integrală Fourier funcţia

$$\varphi(\xi) = \begin{cases}\sin\xi, & |\xi| \le 3\pi\\ 0, & |\xi| > 3\pi\end{cases}$$

Rezolvare: conform egalităţii (*) şi a funcţiei date vom scrie

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-3\pi}^{3\pi}\sin\xi[\cos\tau(x-\xi) + i\sin\tau(x-\xi)]d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-3\pi}^{3\pi}\sin\xi\cos\tau(x-\xi)d\xi + \underbrace{\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-3\pi}^{3\pi}\sin\xi\sin\tau(x-\xi)d\xi}_{=0}$$

Deoarece $\sin\tau(x-\xi)$ este impară în raport cu τ, ultimul termen din egalităţile anterioare este nul. Rezultă

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-3\pi}^{3\pi}\sin\xi(\cos\tau x\cos\tau\xi+\sin\tau x\sin\tau\xi)d\xi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-3\pi}^{3\pi}\sin\xi\cos\tau x\cos\tau\xi d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-3\pi}^{3\pi}\sin\xi\sin\tau x\sin\tau\xi d\xi=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\tau\int_{0}^{3\pi}\sin\xi\sin\tau x\sin\tau\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\tau x d\tau\int_{0}^{3\pi}\sin\xi\sin\tau\xi d\xi.$$

Liniarizând ultimul factor vom obţine

$$\int_{0}^{3\pi}\sin\xi\sin\tau\xi d\xi=\frac{1}{2}\int_{0}^{3\pi}[\cos(\tau-1)\xi-\cos(\tau+1)\xi]d\xi=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\tau-1)\xi}{\tau-1}-\frac{\sin(\tau+1)\xi}{\tau+1}\right]\Bigg|_{0}^{3\pi}=-\frac{\sin 3\tau\pi}{\tau^2-1}$$

Deci

$$\varphi(x)=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\tau x\cdot\sin 3\tau\pi}{\tau^2-1}d\tau$$

3. Reprezentaţi printr-o integrală Fourier funcţia

$$f(\xi)=\begin{cases}-1 & \text{pentru} \quad |\xi|\geq 1\\ \xi & \text{pentru} \quad \xi\in(-1,0)\\ -\xi & \text{pentru} \quad \xi\in[0,1)\end{cases}$$

Rezolvare: deoarece $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\xi)|d\xi$ este divergentă, vom considera funcţia

$$\varphi(\xi)=1+f(\xi)=\begin{cases}0 & \text{pentru} \quad |\xi|\geq 1\\ 1+\xi & \text{pentru} \quad \xi\in(-1,0)\\ 1-\xi & \text{pentru} \quad \xi\in[0,1),\end{cases}$$

care poate fi reprezentată printr-o integrală Fourier deoarece $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)|\, d\xi$ este

convergentă şi $\varphi(\xi)$ este pară conform graficului.

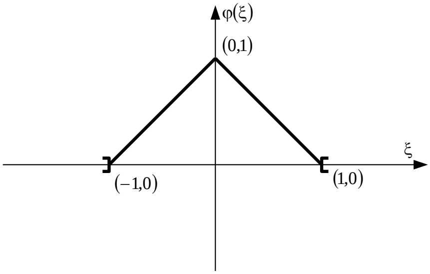

Figura 2

Prin urmare,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{i\tau(x-\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\tau(x-\xi)\, d\xi +$$

$$+\underbrace{\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\sin\tau(x-\xi)\, d\xi}_{=0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\tau x \cos\tau\xi d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\sin\tau x \sin\tau\xi d\xi}_{} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \cos\tau x d\tau \int\limits_{0}^{1} (1-\xi)\cos\tau\xi d\xi$$

Calcule simple conduc la egalitatea

$$\int\limits_{0}^{1} (1-\xi)\cos\tau\xi d\xi = 2\cdot\frac{\sin^2\frac{\tau}{2}}{\tau^2}$$

Rezultă

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^2} \cdot \sin^2 \frac{\tau}{2} \cos \tau x d\tau$$

Atunci

$$f(\xi) = -1 + \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^2} \cdot \sin^2 \frac{\tau}{2} \cdot \cos \tau x d\tau.$$